- Ecriture exponentielle de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}e^{-i\varphi},\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[}$$

Exercice n° 6

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $z_1 = e^{i\theta} - i$ et $z_2 = e^{-i\theta} + i$

●

- $z_1 = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}\right]$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left[-i\,2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} \times 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$$

Donc : $\boxed{z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

- On a : $z_2 = e^{-i\theta} + i = \overline{e^{i\theta} - i} = \overline{z_1}$

Donc : $\boxed{z_2 = 2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}$

Par suite on aura :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}} =$$

$$e^{-i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$

Finalement on a $\boxed{\frac{z_2}{z_1} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}}$

● $\text{aff}(\overrightarrow{OM_1}) = z_1 = e^{i\theta} - i$

$\text{aff}(\overrightarrow{M_2M}) = z - z_2 = 2\cos\theta - (e^{-i\theta} + i)$

$= 2\cos\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) - i$

$= \cos\theta + i\sin\theta - i = e^{i\theta} - i = z_1$

Donc $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2M}$ ce qui donne :
OM_1MM_2 est un parallélogramme (1)

Et comme $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right| = 1$ alors on a

$|z_1| = |z_2| \Rightarrow OM_1 = OM_2$ (2)

Conclusion : d'après les résultats (1) et (2) le quadrilatère OM_1MM_2 est un losange

- OM_1MM_2 est un losange pour qu'il soit un carré
Il suffit que : (OM_1) et (OM_2) soient perpendiculaires

Donc on doit avoir : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_2})}{aff(\overrightarrow{OM_1})}$ imaginaire pur

Or $\frac{z_2}{z_1} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ est un imaginaire pur

Si et seulement si : $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $\theta = -k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Pour $k = 0$ on aura $\boxed{\theta = 0}$

Exercice n° 7

M d'affixe z

● posons $z = x + iy$ on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z-1| = |x-1+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

Donc

$|z| = |z-1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Conclusion : l'ensemble des points M tels que $|z| = |z-1|$ est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

Oarray.tn - Aqra Bleen - Oarray.tn